# システム制御理論　レポート課題 No. 1　解答

$\boxed{1}$

(1)

(i) $cb = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2$

(ii) $bc = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $cA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $Ab = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

(v) $cAb = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 7$

(2)

$Ac^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$A^{\mathsf{T}}b = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$

$A^{\mathsf{T}}c^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

であるので，つぎのとおり計算できる．

(i) $\langle b, Ac^{\mathsf{T}} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = 6$ , (ii) $\langle A^{\mathsf{T}}b, c^{\mathsf{T}} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 6$

(iii) $\langle Ab, c^{\mathsf{T}} \rangle \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 7$ , (iv) $\langle b, A^{\mathsf{T}}c^{\mathsf{T}} \rangle \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 7$

$\boxed{2}$ $|A| = 8$, $\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 5 & -4 & -3 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ となる．よって

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 5 & -4 & -3 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

である．

$\boxed{3}$

(1)

求める固有値を $\lambda$ とする．

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 5) \end{aligned}$$

よって求める固有値は $\lambda = 2, 5$ である．また $\lambda = 2$ に対応した固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\lambda = 5$ に対応した固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすることができる．

(2)

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-4 & -1 \\ -2 & s-3 \end{bmatrix}$$

である．よって

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s-4 & -1 \\ -2 & s-3 \end{vmatrix} = s^2 - 7s + 10$$

$$\mathrm{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s-3 & 1 \\ 2 & s-4 \end{bmatrix}$$

となる．したがって

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 - 7s + 10} \begin{bmatrix} s-3 & 1 \\ 2 & s-4 \end{bmatrix}$$

である．

(3)

$$\begin{aligned} c(sI - A)^{-1}b &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 - 7s + 10} \begin{bmatrix} s-3 & 1 \\ 2 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 - 7s + 10} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-3 & 1 \\ 2 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 - 7s + 10} \begin{bmatrix} s-3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2s - 7}{s^2 - 7s + 10} \end{aligned}$$