システム制御理論　レポート課題 No. 2　解答

問 1：つぎで与えられるシステムの伝達関数表現を求めよ．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

問 2：つぎで与えられるシステムの伝達関数表現を求めよ．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

問 3：つぎで与えられるシステムの状態空間表現を求めよ．

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

問 4：つぎで与えられるシステムの状態空間表現を求めよ．

$$G(s) = \frac{3s^2 + 2s + 3}{s^3 + 4s^2 + 5}$$

<u>解答</u>

問 1：

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s-2 & 4 \\ -7 & s+9 \end{vmatrix} \\ &= (s-2)(s+9) + 28 \\ &= s^2 + 7s + 10 \\ &= (s+2)(s+5) \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} G(s) &= c(sI - A)^{-1} b \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+5)} \begin{bmatrix} s+9 & -4 \\ 7 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-4}{(s+2)(s+5)} \end{aligned}$$

問 2：

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s-4 & -2 \\ 1 & s-1 \end{vmatrix} \\ &= (s-4)(s-1) + 2 \\ &= s^2 - 5s + 6 \\ &= (s-2)(s-3) \end{aligned}$$

となるので

$$
\begin{aligned}
G(s) &= c(sI-A)^{-1}b \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{(s-2)(s-3)}\begin{bmatrix}s-1 & 2\\ -1 & s-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix} \\
&= \frac{2(s-2)}{(s-2)(s-3)} \\
&= \frac{2}{s-3}
\end{aligned}
$$

問 3： 与式より

$$\frac{\mathrm{d}^3y(t)}{\mathrm{d}t^3}+2\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)=u(t)$$

となるので

$$y(t)=x_1(t),\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=x_2(t),\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=x_3(t)$$

とおくと

$$\frac{\mathrm{d}^3y(t)}{\mathrm{d}t^3}=\frac{\mathrm{d}x_3(t)}{\mathrm{d}t}=-x_1(t)-x_2(t)-2x_3(t)+u$$

となる．よって求める状態空間表現はつぎとなる．

$$
\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t) \\
y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}
\end{cases}
$$

問 4： 講義資料と同様に伝達関数の分母と分子の要素に分け,

$$X_1(s)=\frac{1}{s^3+4s^2+5}U(s)$$

$$Y(s)=(3s^2+2s+3)X_1(s)$$

とする．まず

$$\frac{\mathrm{d}^3x_1(t)}{\mathrm{d}t^3}+4\frac{\mathrm{d}^2x_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+5x_1(t)=u(t)$$

となるので

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}=x_2(t),\frac{\mathrm{d}^2x_1(t)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=x_3(t)$$

とおくと

$$\frac{\mathrm{d}^3x_1(t)}{\mathrm{d}t^3}=\frac{\mathrm{d}x_3(t)}{\mathrm{d}t}=-5x_1(t)-4x_3(t)+u$$

となる．よって求める状態方程式はつぎとなる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5 & 0 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

また

$$y(t)=3x_1(t)+2x_2(t)+3x_3(t)$$

となるので，求める状態空間表現はつぎとなる．

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$