

システム制御理論 レポート課題 No. 3 解答

つぎの問に答えよ.

問1: つぎで与えられるシステムの応答を求めよ.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

問2: つぎで与えられるシステムの応答を求めよ.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解答

問1:

つぎの計算を行う.

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+4)} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \left(\frac{4}{s+1} - \frac{1}{s+4} \right) & \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4} \right) \\ \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+4} \right) & \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+4} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

両辺を逆ラプラス変換するとつぎを得る.

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(4e^{-t} - e^{-4t}) & \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-4t}) \\ \frac{4}{3}(-e^{-t} + e^{-4t}) & \frac{1}{3}(-e^{-t} + 4e^{-4t}) \end{bmatrix}$$

したがって

$$x(t) = e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(4e^{-t} - e^{-4t}) \\ \frac{4}{3}(-e^{-t} + e^{-4t}) \end{bmatrix}$$

問2:

つぎの計算を行う.

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s-2 & 4 \\ -7 & s+9 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(s+2)(s+5)} \begin{bmatrix} s+9 & -4 \\ 7 & s-2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \left(\frac{7}{s+2} - \frac{4}{s+5} \right) & \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+5} \right) \\ \frac{7}{3} \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+5} \right) & \frac{1}{3} \left(-\frac{4}{s+2} + \frac{7}{s+5} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

両辺を逆ラプラス変換するとつぎを得る.

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(7e^{-2t} - 4e^{-5t}) & \frac{4}{3}(-e^{-2t} + e^{-5t}) \\ \frac{7}{3}(e^{-2t} - e^{-5t}) & \frac{1}{3}(-4e^{-2t} + 7e^{-5t}) \end{bmatrix}$$

したがって

$$x(t) = e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(7e^{-2t} - 4e^{-5t}) \\ \frac{7}{3}(e^{-2t} - e^{-5t}) \end{bmatrix}$$