システム制御理論　レポート課題 No. 4　解答

$\boxed{1}$

　システム
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = Ax(t) + bu(t)$$
において，A, b がつぎの値で与えられるとき，状態フィードバック $u = -[k_1, k_2, \cdots, k_n]x$ を用いて制御系を構成する．このとき制御系構成後のシステムの固有値をそれぞれつぎの値に設定するようなフィードバックゲイン $k_1, k_2, \cdots, k_n$ を求めよ．解答においては，システムの可制御性を調べた上で，フィードバックゲインを求めること．

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 固有値：$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 固有値：$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 + j, \lambda_3 = -2 - j$

(3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 固有値：$\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -6, \lambda_3 = -7$

解答

(1)

　行列 A の固有値は $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}, \lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$ となる．

　また可制御性行列 U_c は
$$U_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
となるので，明らかに $\operatorname{rank} U_c = 2$ となりシステムは可制御である．つぎに
$$A - bk = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 - k_1 & 3 - k_2 \end{bmatrix}$$
となるので，この固有値はつぎで計算できる．
$$\begin{aligned} |\lambda I - A + bk| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -2 + k_1 & \lambda - 3 + k_2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (4 - k_2)\lambda + k_1 - k_2 + 1 \end{aligned}$$
固有値が $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ となるためには $\lambda^2 + 3\lambda + 2$ となる必要があるので，係数比較をして
$$\begin{cases} k_1 &= 8 \\ k_2 &= 7 \end{cases}$$
を得る．

(2)

　行列 A の固有値は $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}j}{2}, \lambda_3 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}j}{2}$ となる．

　また可制御性行列 U_c は

$$U_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので，明らかに $\operatorname{rank} U_c = 3$ となりシステムは可制御である．つぎに

$$A - bk = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1-k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix}$$

となるので，この固有値はつぎで計算できる．

$$\begin{aligned} |\lambda I - A + bk| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1+k_1 & k_2 & \lambda + k_3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + k_3\lambda^2 + k_2\lambda + k_1 - 1 \end{aligned}$$

固有値が $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2+j, \lambda_3 = -2-j$ となるためには $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 5$ となる必要があるので，係数比較をして

$$\begin{cases} k_1 &= 6 \\ k_2 &= 9 \\ k_3 &= 5 \end{cases}$$

を得る．

(3)

　行列 A の固有値は $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2.7321, \lambda_3 = -0.7321$ となる．

　また可制御性行列 U_c は

$$U_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるので，明らかに $\operatorname{rank} U_c = 2$ となりシステムは不可制御となる．したがって，固有値を $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -6, \lambda_3 = -7$ とするフィードバックゲインは存在しない．